Examen de Probabilités et Statistique

Université : Amar Thelidji de Laghouat
Département : Technologie
Section : $2^{ème}$ ST, Semestre 3.
Chargé du module : Dr. M. Bentobache
Date : Le 15/01/2020, 1h30mn

EXERCICE 1 (10pts) : Le tableau suivant représente les données de la série statistique des poids de 100 employés d'une entreprise.

Classes	[56,58[	[58,60[	[60,62[	[62,64[	[64,66[	[66,68[	[68,70[
Nombre d'employés	2	12	18	19	31	15	03

1) Identifier le caractère étudié et sa nature.(1pt)
2) Calculer les fréquences relatives, les fréquences cumulées croissantes et décroissantes.(1.5pts)
3) Représenter les effectifs par un histogramme.(2pt)
4) Représenter graphiquement les fréquences cumulés croissantes et décroissantes.(2pts)
5) Calculer le mode et la médiane par la méthode analytique.(2pt)
6) Calculer la moyenne arithmétique, la variance et l'écart type.(1.5pts)
EXERCICE 2 (04pts) :
Considérons les trois points suivants :

x_i	1	2	5
y_i	1	2	3

1) Trouver la droite de regression qui ajuste le mieux les points (x_0, y_0), (x_1, y_1) et (x_2, y_2). (3.25pts)
2) Calculer le coefficient de corrélation linéaire, puis interprétez-le.(0.75pts)

EXERCICE 3 (6pts) :
1) Soient A et B deux événements tels que :
$P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.3$. Calculer $P(A \cup B)$, $P(A \cap \bar{B})$ et $P(\bar{A} \cap B)$. (3pts)
2) Un radar est placé dans une certaine région afin de capter tous les signaux renvoyés par deux satellites A et B.
a) La probabilité que le radar affiche qu'il y a un signal est égale à 0.8 et la probabilité que le satellite B renvoie le signal est égale à 0.7.
Quelle est la probabilité que seul le satellite A renvoie le signal ? (1.5pt)
b) Supposons avoir les probabilités suivantes :
- La probabilité que le satellite A renvoie le signal est 0.6.
- La probabilité que les deux satellites renvoient le signal simultanément est 0.3.
Quelle est la probabilité que seul le satellite A renvoie le signal ? (1.5pt)

Bonne chance.

Corrigé de l'examen de Statistique

Université : Ammar Télidji de Laghouat
Promotion : 2ème année ST
Chargé de cours : M. Bentobache
Date :15/01/2020
Durée : 1h30mn

Exercice 01

1/

- Le caractère étudié est le poids des employés (**0.5 pt**).
- C'est un caractère quantitatif continue (**0.5 pt**).

2/ **Tableau statistique :**

			(0.5)	(0.5)	(0.5)
Classes	a_i	n_i	f_i	F^+	F^-
[56,58[	2	2	0,02	0.02	1
[58,60[	2	12	0,12	0,14	0,98
[60,62[	2	18	0,18	0.32	0,86
[62,64[	2	19	0,19	0.51	0,68
[64,66[	2	31	0,31	0,82	0.49
[66,68[	2	15	0,15	0,97	0.18
[68,70[	2	3	0,03	1	0.03
Total		100	1		

x_i	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
57	114	6498
59	708	41772
61	1098	66978
63	1197	75411
65	2015	130975
67	1005	67335
69	207	14283
	6344	403252

3/ et 4/ **Représentation graphique des effectifs et fréquences relatives cumulées :** Voir la dernière page.

5/

- Le mode :

L'effectif maximum est $n_{max} = n_5 = 31$. Donc la classe modale est $[e_{i-1}, e_i[= [64, 66[$ (**0.25 pt**) d'amplitude $a_i = 2\ kg$. D'où le mode est égale à :
$Mo = e_{i-1} + a_i \frac{d_1}{d_1+d_2} = 64 + 2\frac{31-19}{(31-19)+(31-15)} = 64 + 2\frac{12}{12+16} = 64.86\ kg$.(**0.25 pt+0.5pt**)

- La médiane :

La plus petite FCC supérieure ou égale à 0.5 est $F_4^+ = 0.51$. Donc la classe médiane est : $[e_{i-1}, e_i[= [62, 64[$ (**0.25 pt**) d'amplitude $a_i = 2\ kg$. D'où la médiane est égale à :
$Me = e_{i-1} + a_i \frac{0.5 - F_{i-1}^{\uparrow}}{f_i} = 62 + 2\frac{0.5-0.32}{0.51-0.32} = 63.89\ kg$.(**0.25 pt+0.5pt**)

6/**La moyenne arithmétique** représente le poids moyen des employés :
$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = \frac{6344}{100} = 63.44\ kg$.(**0.5 pt**)
La variance est donnée par : $Var(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{403252}{100} - (63.44)^2 = 7.89$.(**0.5 pt**)
L'écart type est $\sigma = \sqrt{Var(X)} = 2.81\ kg$.(**0.5 pt**)

Exercice 02

x	y	x^2	y^2	xy
1	1	1	1	1
2	2	4	4	4
5	3	25	9	15
8	**6**	**30**	**14**	**20**

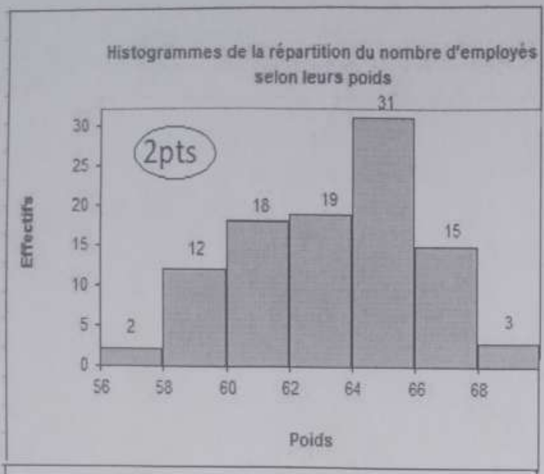
1/
$\bar{x} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i = \frac{8}{3} = 2.67$.(**0.25pt**)
$\bar{y} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i = \frac{6}{3} = 2$.(**0.25pt**)
$v(x) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i^2 - \bar{x}^2 = \frac{30}{3} - 2.67^2 = 2.87$.(**0.25pt**)
$v(y) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} y_i^2 - \bar{y}^2 = \frac{14}{3} - 2^2 = 0.67$.(**0.25pt**)
$Cov(x, y) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} x_i y_i - \bar{x}\bar{y} = \frac{20}{3} - (2.67 \times 2) = 1.33$.(**0.25pt**)
$a = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x^2} = 0.46$.(**1pt**)
$b = \bar{y} - a\bar{x} = 0.77$.(**1pt**)
D'où, la droite de regression de y en x a comme équation :

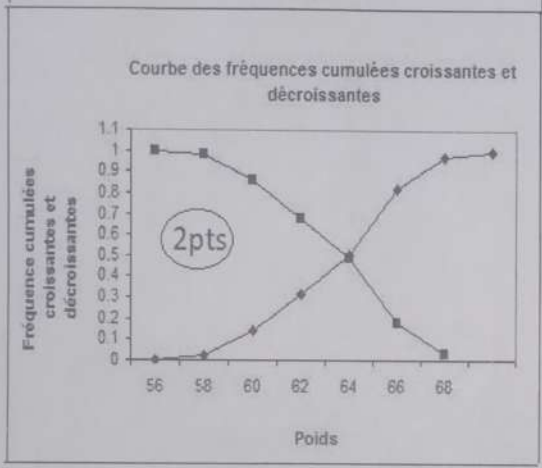
$$y = 0.46x + 0.77.$$

2/ Le coefficient de corrélation linéaire est donnée par :

$$\rho = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{v(x)}\sqrt{v(y)}} = 0.95.(\mathbf{0.5pt})$$

ρ est proche de 1. D'où l'on déduit que la dépendance fonctionnelle entre la température et le temps est linéaire.(**0.25pt**)





Exercice 3 :

1)

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.6 - 0.3 = 0.7$. **(1 pt)**
- Calcul de $P(A \cap \bar{B})$: $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$. D'où $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.3 = 0.1$. **(1 pt)**
- Calcul de $P(\bar{A} \cap B)$: $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$. D'où $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.3 = 0.3$.**(1pt)**

2) Considérons les événements suivants :
A : "le satellite A renvoie le signal";
B : "le satellite B renvoie le signal";
C : "le radar affiche qu'il y a un signal".
D : "seul le satellite A renvoie le signal".
On a $C = A \cup B$ et $D = A \cap \bar{B}$

a) $P(A \cup B) = 0.8$ et $P(B) = 0.7$.
$P(A \cup B) = P(A \cap \bar{B}) + P(B)$. D'où
$P(A \cap \bar{B}) = P(A \cup B) - P(B) = 0.8 - 0.7 = 0.1$.**(1.5pt)**

b) $P(A) = 0.6$ et $P(A \cap B) = 0.3$. On a
$P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B)$. D'où
$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.6 - 0.3 = 0.3$.**(1.5pt)**